Criterio del rapporto

Sia $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una success. a **termini positivi** e consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Supponiamo che

$$\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in [0, +\infty]$$

Allora

1. se $L < 1$ la serie converge;
2. se $L > 1$ la serie diverge;
3. se $L = 1$ il criterio è inefficace

Criterio della radice

Sia $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una success. a **termini positivi** e consideriamo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Supponiamo che

$$\exists \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \in [0, +\infty]$$

Allora

1. se $L < 1$ la serie converge;
2. se $L > 1$ la serie diverge;
3. se $L = 1$ il criterio è inefficace

<u>Osservazione:</u> si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

In particolare, se è inefficace il criterio del rapporto, lo è anche quello della radice.

Criteri del confronto

Siano

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

due serie a termini *positivi*.

(1) **Confronto:** Se

$$a_n \leq b_n \quad \text{e} \sum_n b_n \text{ converge,}$$

allora anche

$$\sum_n a_n \text{ converge.}$$

(2) **Confronto asintotico:** se

$$\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, +\infty)$$

allora

$$\sum_n a_n \text{ converge } \textbf{se e solo se} \sum_n b_n \text{ converge.}$$

Osservazione: se

$$\lim_{n \to +\infty} c_n = L \in (0, +\infty)$$

allora

$$\sum_n a_n c_n \text{ ha lo stesso carattere di } \sum_n a_n.$$

Osservazione: La scelta di b_n è il cruciale per applicare il criterio del confronto asintotico. Lo strumento essenziale per trovare b_n è dato dagli *sviluppi di Taylor*.

Per esempio per studiare il carattere di $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{1/n^2}-1\right)$ uso lo sviluppo $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$ quindi

$$e^{1/n^2} - 1 = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{1/n^2}-1}{\frac{1}{n^2}} = 1 + \lim_{n\to+\infty} \frac{o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Allora scelgo $b_n = \frac{1}{n^2}$. Siccome

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{converge}$$

concludo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{1/n^2} - 1\right) \quad \text{converge.}$$

Conviene disporre di una famiglia di serie, il cui carattere è noto, con cui fare il confronto.

La serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\exp(\gamma n)}{n^{\alpha}(\log(n))^{\beta}} \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

- se $\gamma > 0$: **DIverge** per ogni α, $\beta \in \mathbb{R}$
- se $\gamma < 0$: **CONverge** per ogni α, $\beta \in \mathbb{R}$
- se $\gamma = 0$:
  - ♣ se $\alpha > 1$: **CONverge** per ogni $\beta \in \mathbb{R}$
  - ♣ se $\alpha < 1$: **DIverge** per ogni $\beta \in \mathbb{R}$
  - ♣ se $\alpha = 1$:
    - ♡ se $\beta > 1$: **CONverge**
    - ♡ se $\beta \leq 1$: **DIverge**